Examen 26 Mai 2020

Le barème est indicatif. Toutes les réponses doivent être justifiées

Exercice 1. (Intégrales généralisées - 5 points).

1. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{(x(1-x))^{2\alpha+1}}\,dx$ est convergente.
2. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx$ est convergente.
3. Montrer que si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda > 0$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Exercice 2. (Suite et série de fonctions - 8 points). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n + (n(x-n))^2}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à déterminer.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
3. La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$? Justifiez votre réponse.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$|R_n(x)| \le \frac{2}{n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k+k^2}.$$
   (b) En déduire que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (a) La fonction S est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifiez votre réponse.
   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 3. (Espaces vectoriels normés - 8 points). Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N(x,y) = \max_{0\le t\le 1} |x+ty|.$$

et soit $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$

1. Montrer que N est une norme.
2. Déterminer le plus petit nombre $C > 0$ tel que
   $$N(x,y) \le C\sqrt{x^2+y^2}$$
   pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. La norme N et la norme $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ? Justifiez votre réponse.
4. Montrer que $N(x,y) = \max\{|x|, |x+y|\}$.
5. Dessiner la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la norme N.
6. L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \ge 2, |y| \le 1\}$ est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il compact ? Justifiez votre réponse.