TD 2 : Intégrales généralisées

Exercice 1. (**Intégrale de Bertrand - Résultat à connaitre**) Étudier la convergence ou la divergence des intégrales de Bertrand :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

avec $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$.

Exercice 2. Étudier la convergence ou la divergence des intégrales suivantes :
a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ b. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^2}$ c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)^3}}$ d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\sqrt{t^2+t+1}}\, dt$
e. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1+\sin(t))\, dt$ f. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ g. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}}\, dt$

Exercice 3. Calculer les intégrales généralisées suivantes :
a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ c. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$ d. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$ e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\, dx$
f. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}$, $(a<b)$ g. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$ h. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}\, dx$

Exercice 4. Soit f une fonction continue et positive définie sur $\mathbb{R}$. Indiquer, en justifiant votre réponse, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

a. Si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ alors l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

b. Si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

c. Si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et si f est décroissante alors $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$. *Indication : on pourra remarquer que* $xf(2x) \leq \int_x^{2x} f(t)dt$.

Exercice 5. (Fonction Gamma)

a. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale impropre $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)dt$ est convergente.

b. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ en utilisant une intégration par parties.

c. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire que $\Gamma(n+1) = n!$.

Exercice 6. (**Théorème d'Abel - Résultat à connaitre**) Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t)\, dt$ est bornée. Montrer que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, g(t)\, dt \quad \text{converge.}$$

Exercice 7. À l'aide d'une comparaison série-intégrale montrer que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{t}} dt$$

est divergente. En déduire que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :
a. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ b. $\int_0^\infty \cos(t^2)\, dt$

Exercice 8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique dont l'intégrale $\int_0^\infty f(x)dx$ est convergente. Montrer que f est la fonction nulle. *Indication : raisonner par l'absurde et utiliser le critère de Cauchy.*

Exercice 9. Comparaison série-intégrale. Montrer que, lorsque $n \to \infty$:

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$ b. $\ln(n!) \sim n \ln n$ c. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$