Examen 11 mai 2017

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif.

Questions de cours. (3,5 points)

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie de E et $f : A \to F$ une application lipschitzienne. Donner la définition de lipschitzienne et montrer que f est continue.
2. Vrai ou faux, sans justification.
   (a) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
   (b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.
   (c) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'ouverts d'un espace vectoriel normé E. La partie $A = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est une partie ouverte.
   (d) Soit E un espace vectoriel normé. Toute suite de Cauchy de E est convergente.

Exercice 1. (Intégrales généralisées - 4 points)

1. Étudier la convergence ou la divergence des intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ (b) $\int_0^{+\infty} t\sin t\, e^{-t}\,dt$ (c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\,dt$
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 2. (Espaces vectoriels normés - 6 points) Soient a et b deux réels strictement positifs. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N(x, y) = a|x| + b|y|.$$

1. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une norme.
2. Dessiner la boule fermée de centre $(0, 1)$ et de rayon 1 associée à la norme N.
3. Soit N_1 la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par $N_1(x, y) = |x| + |y|$. Les normes N et N_1 sont-elles équivalentes ? Trouver la plus grande constante positive C_1 et la plus petite constante positive C_2 telles que
$$C_1 N_1(x, y) \le N(x, y) \le C_2 N_1(x, y)$$
pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme N_1.
   (a) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y > 0\}$ est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il compact ?
   (b) Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^2 \le 1\}$ est compact.

Exercice 3. (Séries de fonctions - 6,5 points) Pour $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}$$

et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de S.
5. Soit $x > 0$ fixé.
   (a) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que
   $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}.$$
   (b) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$.
   (c) En déduire
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{S(x)}{-\ln x} = 1.$$