Examen 9 mai 2018

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif.

Questions de cours. **(2,5 points)** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition de suite de Cauchy dans E.
2. Montrer que tout suite convergente d'éléments de E est une suite de Cauchy.
3. Donner la définition et un exemple d'espace vectoriel normé complet.

Exercice 1. **(Intégrales généralisées - 3 points)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln t)^n \, dt$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = -nI_{n-1}$.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. **(Séries de fonctions - 9,5 points)** Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$$

et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Justifiez votre réponse.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.
5. Soit $x > 0$ fixé.
   (*a*) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que
   $$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \, dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \, dt.$$
   (*b*) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \, dt$.
   (*c*) En déduire $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 f(x)}{2} = 1$.

Exercice 3. **(Espaces vectoriels normés - 6,5 points)** Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N(x) = \max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\}.$$

1. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une norme.
2. Dessiner la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 associée à la norme N.
3. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   (*a*) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y > 0\}$ est-il fermé ? Est-il ouvert ? Est-il compact ? Justifiez votre réponse.
   (*b*) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ est continue.
   (*c*) Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 2\}$ est compact.