Partiel 9 mars 2017

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Questions de cours.

1. *a*) Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[0,1]$. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   b) Soit f une fonction continue et positive sur $[0,1]$. Montrer que
$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\,dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)\,dt.$$
2. Donner la définition d'intégrale semi-convergente.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Après avoir rappelé la définition de convergence uniforme, montrer que la fonction f est bornée.

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - (1+x)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$(1-t^2) \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence des intégrales suivantes
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,\ I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$
   Puis montrer que
$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt.$$
   a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que
$$I_n = W_{2n+1}$$
   et
$$J_{n+1} = W_{2n} \text{ (utiliser } x = \varphi(t) = \tan t\text{)}.$$
   b) Trouver une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
4. En utilisant $W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$, calculer I.

Exercice 2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx}).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\,dx.$$