TD 3 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ suivantes :

a. $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ sur $]-1,1[$, puis sur $[-a,a]$ avec $0 \leq a < 1$.

b. $f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0,1]$.

c. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

d. $f_n(x) = \sin(x)\exp(1-x/n)$ sur $x \in [0,2\pi]$.

e. $f_n(x) = \ln(x^4 + nx^2)$ sur $]0,+\infty[$.

f. $f_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^p}$ sur $\mathbb{R}$.

g. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

h. $f_n(x) = \sin^n x \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses:

a. Si les fonctions f_n sont croissantes alors f l'est aussi.

b. Si les fonctions f_n sont strictement croissantes alors f l'est aussi.

c. Si les fonctions f_n et f sont continues, alors la convergence est uniforme.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer
$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} I_n.$$
En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 4. Soit

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad x \in \mathbb{R},\ n > 0$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite des dérivées $(f_n')_{n\geq 1}$.
3. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 5. (Suite récurrente)
On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\Big(x - (f_n(x))^2\Big).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \to \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$
3. En déduire la convergence uniforme sur I

Exercice 6. Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions de terme général :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{\cosh nx}, \qquad x \geq 1,\ n \in \mathbb{N}.$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n(|x-n|+1)}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n > 0.$
3. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2} \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$

Exercice 7. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$, soit
$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right).$$
Montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$ avec $A > 0$. La somme de cette série est-elle continue ?
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}.$$
4. En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9. Montrer que la série
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^n}$$
converge uniformément sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 10. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

1. Vérifier que f est définie sur I.
2. Montrer que f est continue sur I.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
4. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Exercice 11. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(\sin x)^n}$$

est continue sur $]0, \pi[$.

Exercice 12. On considère la série de fonctions

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. Prouver que S est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.

Exercice 13. On considère la série de fonctions $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$, avec $f_n = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14. (Fonction zeta)
On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $x \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

4. Démontrer que ζ est convexe.
5. Montrer que $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$ et tracer la courbe représentative de ζ.