Devoir Maison

Exercice 1. Soit $p \in]1,+\infty[$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p(]0,+\infty[,\mathcal{B}(]0,+\infty[,\lambda)$ avec λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,+\infty[$.

Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $x \in]0,+\infty[$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{x}\int f \mathbb{1}_{]0,x[}\, d\lambda.$$

Le but de l'exercice est de montrer $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ (Inégalité de Hardy).

1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact.
   (a) Montrer $F \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[) \cap \mathcal{L}^p$. Montrer que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) Supposons $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. En utilisant une intégration par parties, montrer que
   $$\int_0^{+\infty} (F(x))^p \, dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} (F(x))^{p-1} f(x)\, dx.$$
   En déduire, en appliquant l'inégalité de Hölder, que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
   (c) Montrer que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$ (on ne suppose plus f positive).
2. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}^p$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact dans $]0,+\infty[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.
   Indication : On pourra utiliser la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.
   (b) Montrer que $F \in \mathcal{C}(]0,+\infty[) \cap \mathcal{L}^p$ et que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
3. Montrer que
   $$\sup\left\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p}, f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p \neq 0\right\} = \frac{p}{p-1}.$$
   Indication : On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,+\infty[$.