Devoir Maison

Exercice 1.

1. Soit H muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace de Hilbert complexe et soit $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ la norme associée au produit scalaire.
   (a) Pour tout $x, y \in H$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$
   (b) En déduire que si $(x_n)_n$ converge vers x et $(y_n)_n$ converge vers y dans H, alors $(\langle x_n, y_n \rangle)_n$ converge vers $\langle x, y \rangle$ dans $\mathbb{C}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'espace de Hilbert complexe $H = L^2(]a, b[, \lambda; \mathbb{C})$ muni du produit scalaire
   $$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{]a,b[} f(t) g(t) \, d\lambda(t)$$
   avec λ la mesure de Lebesgue. On définit l'espace de Sobolev :
   $$H^1(]a, b[) = \left\{ u \in H, \exists w \in H, \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a, b[), \int_{]a,b[} u(t) \phi'(t) \, d\lambda(t) = -\int_{]a,b[} w(t) \phi(t) \, d\lambda(t) \right\}.$$
   Rappel : $\mathcal{C}_c^\infty(]a, b[)$ est l'ensemble des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ à support compact $\mathrm{supp}(\phi) \subset$ $]a, b[$. *Le support d'une fonction ϕ est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in]a, b[, \phi(x) \neq 0\}$, i.e.* $\mathrm{supp}(\phi) = \overline{\{x \in]a, b[, \phi(x) \neq 0\}}$.
   (a) Montrer que $H^1(]a, b[)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(]a, b[)$. En particulier, montrer que $\mathcal{C}^1([a, b]) \subset H^1(]a, b[)$.
   (b) Montrer que si $u \in H^1(]a, b[)$ alors la fonction $w \in L^2(]a, b[)$ est unique. *Indication : on pourra utiliser la densité de $C_c^\infty(]a, b[)$ dans $L^2(]a, b[)$ (voir exercice 4 du TD 5)*
   Dans la suite, pour tout $u \in H^1(]a, b[)$, on appellera w la *dérivée faible* de u et on notera $w = u'$.
   (c) Soit $u :]-1, 1[\to \mathbb{C}$ la fonction définie par $u(x) = (-x)\mathbb{1}_{]-1,0]}(x) + x\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$. Montrer que $u \in H^1(]-1, 1[)$ et calculer u'. Montrer que $u' \notin H^1(]-1, 1[)$.
   (d) On considère $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1} : H^1(]a, b[) \times H^1(]a, b[) \to \mathbb{C}$ l'application définie par
   $$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}.$$
   Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ est un produit scalaire sur $H^1(]a, b[)$.
   (e) Montrer que $H^1(]a, b[)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ est un espace de Hilbert.
   (f) Est-ce que l'ensemble $H^1(]a, b[)$, vu comme sous-ensemble de $L^2(]a, b[)$ muni de la norme $\| \cdot \|_{L^2}$, est fermé ?

Simona ROTA NODARI : simona.rota-nodari@u-bourgogne.fr