Devoir Maison

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant concernant le prolongement d'une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel (sev) de E en une forme linéaire définie sur E tout entier.

Théorème 1 (Hahn-Banach) *Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ et } p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que pour tout $x \in G$

$$g(x) \leq p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in G$, et telle que pour tout $x \in E$

$$f(x) \leq p(x).$$

Soit

$$P = \{h : \mathcal{D}(h) \subset E \to \mathbb{R} \,|\, \mathcal{D}(h) \text{ sev de E}, h \text{ linéaire}, G \subset \mathcal{D}(h), h \text{ prolonge } g, h(x) \leq p(x)\ \forall x \in \mathcal{D}(h)\}$$

muni de la relation d'ordre

$$h_1 \prec h_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}(h_1) \subset \mathcal{D}(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1.$$

1. Montrer que P est non vide.
2. Montrer que tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant. En déduire que P admet un élément maximal noté f.
3. Montrer que $\mathcal{D}(f) = E$. *Indication : on peut raisonner par l'absurde en supposant $\mathcal{D}(f) \neq E$ et en construisant une forme linéaire h qui contredit la maximalité de f.*

Exercice 2. On considère c_0, ℓ^1 et ℓ^∞ les espaces de Banach des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définis par

$$\begin{aligned}
&x \in \ell^1 \text{ si et seulement si } \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty,\\
&x \in \ell^\infty \text{ si et seulement si } \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n| < \infty,\\
&x \in c_0 \text{ si et seulement si } x \in \ell^\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0.
\end{aligned}$$

1. Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^1$. Montrer que l'application $\Lambda_y : c_0 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in c_0$, par
$$\Lambda_y x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \tag{1}$$
est une forme linéaire continue de norme $\|\Lambda_y\| = \|y\|_1$
2. Soit $f \in c_0^*$. On pose $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $y_k = f(e(k))$ avec $e(k) = (\delta_{ik})_{i\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Montrer que $y \in \ell^1$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in c_0$, $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$. *Indication : on pourra utiliser que le sous-espace vectoriel engendré par les $e(k)$ est dense dans c_0.*
   (c) En déduire que c_0^* est isométriquement isomorphe à ℓ^1.
3. Montrer qu'il existe $\Phi \in (\ell^\infty)^*$, $\Phi \neq 0$ telle que $\Phi(x) = 0$ pour tout $x \in c_0$. En déduire que $(\ell^\infty)^*$ n'est pas isométriquement isomorphe à ℓ^1. *Indication : sur l'espace vectoriel des suites convergentes, noté c, on peut définir une application linéaire continue par $\tilde{\Phi}(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$.*