TD6 : Transformée de Fourier et équations aux dérivées partielles

Exercice 1. On appelle *espace de Schwartz* l'espace de fonctions défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) |\, \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

On dira que f_n converge vers f in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\alpha,\beta} = 0$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles définie par

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et avec $u = u(t, x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit g une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

L'objectif de cet exercice est de trouver une solution de ce problème de Cauchy.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, calculer la transformée de Fourier de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$.

   Indication : on pourra utiliser $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$.
2. Soit u une solution de (1). Supposons que la transformée de Fourier de u par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ est bien définie.
   (a) Montrer que
   $$\hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) e^{-t\xi^2}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$,
   $$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\, dy. \tag{2}$$
   On appelle $K(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ *noyau de la chaleur.*
   (c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t, x)\, dx = 1$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \mapsto K(t, x)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que u, définie par (2), est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable t et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la variable x. Vérifier que u est bien une solution de l'équation de la chaleur.
   (e) Montrer que
   $$\lim_{t\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, x - y) g(y)\, dy = g(x).$$
   Indication : on pourra utiliser l'uniforme continuité de g.
3. Calculer la solution de l'équation de la chaleur pour la condition initiale $g(x) = e^{-x^2}$.
4. On définit $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est à dire l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, continues au sens séquentiel suivant :
   $$u(f_n) \to u(f) \text{ pour toute suite } f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ convergeant vers } f\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
   Les éléments de $\mathcal{S}'$ sont appelés *distributions tempérées*. La topologie sur $\mathcal{S}'$ est telle que :
   $$u_n \to u \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } u_n(f) \to u(f) \text{ pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
   (a) Montrer que la *masse de Dirac* définie par $\delta_x(f) = f(x)$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la forme linéaire définie par $h(f) = \int_{\mathbb{R}} h(y)f(y)\, dy$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme linéaire $K(t, x - \cdot)(g) = \int_{\mathbb{R}} K(t, x - y)g(y)\, dy$ converge vers δ_x dans $\mathcal{S}'$ lorsque t tend vers 0.