TD4 : Espaces de Hilbert et séries de Fourier

Exercice 1. Soit M un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H. Montrer que $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert et $L : H \to \mathbb{K}$ une application linéaire continue. Posons $M = \{x \in H \mid L(x) = 0\}$.

1. Montrer que M est un sous-espace vectoriel fermé de H.
2. Montrer que si $M \neq H$ alors $M^{\perp}$ est un sous-espace de dimension 1.

Exercice 3. (Procédé de Gram-Schmidt) Soit $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendant dans un espace de Hilbert H. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n de la façon suivante :

$$u_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$$
$$u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}, \quad v_n = x_n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle x_n, u_i \rangle u_i, \quad n \geq 1$$

1. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un système orthonormé.
2. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(\{x_0, \dots, x_N\}) = \mathrm{Vect}(\{u_0, \dots, u_N\})$.
3. En déduire une preuve de l'existence d'une base hilbertienne dans un espace de Hilbert séparable.

Exercice 4. (Polynômes de Legendre) On considère l'espace de Hilbert réel $H = L^2([-1,1], \lambda; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{[-1,1]} f(t)g(t)\, d\lambda(t).$$

1. Soit $\mathcal{Y} = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ la famille dénombrable d'éléments de H définis par $y_n(t) = t^n$.
   (a) Montrer que $\mathcal{Y}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendant et construire, via le procédé de Gram-Schmidt, une famille orthogonale $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) Calculer explicitement p_0, p_1, p_2 et p_3.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Les polynômes de Legendre sont définis par la formule de Rodrigues :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \tag{L}$$

   (a) Montrer que la famille $\mathcal{P} = \{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ est orthogonale.
   (b) En déduire que
   $$p_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n.$$
   (c) Calculer $\|P_n\|^2$ et en déduire un système orthonormé $\mathcal{E} = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ de H. Le système orthonormé $\mathcal{E}$ est-il une base hilbertienne de $H = L^2([-1,1], \lambda; \mathbb{R})$?
   (d) Montrer que la fonction $f(t) = |t|$ se « décompose » selon la base $\mathcal{E}$ de la façon suivante :
   $$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \text{ pair}} (-1)^{n/2} \frac{(2n+1)(n-2)!}{2^n \left(\frac{n}{2}+1\right)! \left(\frac{n}{2}-1\right)!} P_n(t).$$

   Indication : On pourra remarquer $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$ et en déduire qu'il suffit de calculer $\int_0^1 t P_n(t)\, dt$ pour n pair.

3. Calculer
$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$
et en déduire
$$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x) \, dx$$
avec g qui satisfait
$$\int_{-1}^{1} g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} xg(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)\, dx = 0, \ \int_{-1}^{1} |g(x)|^2\, dx = 1.$$

Exercice 5. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. En déduire la somme des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.