TD2 : Les espaces L^p

Exercice 1. (Inégalité de Tchebychev)
Soit $f \in L^p(E, \mu; \mathbb{K})$ avec $1 \leq p < \infty$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(\{|f| > \varepsilon\}) \leq \frac{||f||_p^p}{\varepsilon^p}.$$

Exercice 2. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage. On pose $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mu; \mathbb{C})$.

1. Montrer que si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors $\ell^p \subset \ell^q$.
2. Montrer que l'injection canonique $j \colon \ell^p \to \ell^q$ est une application linéaire continue et calculer sa norme.
3. Montrer que si $1 \leq p < q \leq +\infty$ alors l'inclusion $\ell^p \subset \ell^q$ est stricte.
4. Montrer que si $1 \leq p < +\infty$ alors le sous-espace vectoriel V engendré par les suites $e(k)$, $e(k)$ étant la suite qui vaut 1 au k-ième terme et 0 sinon, est dense dans ℓ^p. En déduire que ℓ^p est séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Exercice 3. (Inégalité de Hölder généralisée)
Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et r défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que pour $f \in L^p(E, \mu; \mathbb{K})$ et $g \in L^q(E, \mu; \mathbb{K})$ on a :

$$||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que l'injection canonique $j \colon L^q \to L^p$ est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 5. Soit $f \in L^r(E, \mu; \mathbb{K})$ pour $r < +\infty$. Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Indication : Utiliser l'inégalité de Tchebychev.

Exercice 6.

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ telle que :
   (a) pour tout $i \in I$, $\mathcal{O}_i$ est un ouvert non vide de E,
   (b) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
   (c) I n'est pas dénombrable.

   Montrer que E n'est pas séparable. (*Indication : raisonner par l'absurde*).
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $f_x = \chi_{\mathcal{B}(x,1)}$ où $\mathcal{B}(x, 1) \subset \mathbb{R}^d$ est la boule fermée de centre x et de rayon 1. En utilisant la famille d'ouverts $(\mathcal{O}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ avec

$$\mathcal{O}_x = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d), ||f - f_x||_\infty < \frac{1}{2} \right\},$$

   montrer que $L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ n'est pas séparable.

Exercice 7. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(E, \mu; \mathbb{K})$ qui converge simplement presque partout vers une fonction f de $L^p(E, \mu; \mathbb{K})$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(E, \mu; \mathbb{K})$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} ||f_n||_p = ||f||_p$.

Exercice 8. Pour une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et pour $h \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\tau_h f$ par $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$.

1. Soit $p \in [1, \infty[$.
   (a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$, τ_h définit une isométrie de $L^p = L^p(\mathbb{R}, \lambda)$.
   (b) Soient $g \in C_c(\mathbb{R})$ une fonction continue à support compact. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |a - b| < \delta \Rightarrow ||\tau_a g - \tau_b g||_p < \varepsilon.$$

   (c) En utilisant la densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans L^p, montrer que si $f \in L^p$, on a $\lim_{h \to 0} ||\tau_h f - f||_p = 0$.
2. Donner un contre-exemple simple qui montrent que le résultat (c) n'est pas valable pour L^∞.