TD3 : Formes linéaires et espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit ℓ^2 l'espace des suites de nombre complexes a telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ et $h^1 = \{a \in \ell^2, \sum_{n=0}^{+\infty} n^2|a_n|^2 < +\infty\}$. Pour tout $a, b \in h^1$, on pose

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}(1+n^2)a_n\overline{b_n}.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle : h^1 \times h^1 \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire et que h^1 muni di ce produit scalaire est un espace de Hilbert.
2. Montrer que h^1 est un sous-espace dense de ℓ^2

Exercice 2. Soit E l'espace préhilbertien des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$. On note par $||f||$ la norme de $f \in E$.

1. Soit $0 < a < 1$. Pour $g \in E$, on pose $T(g) = \int_0^a xg(x)\, dx$.
   (a) Montrer que T définit une forme linéaire continue sur E et que la norme de T est majorée par $(\frac{a^3}{3})^{1/2}$.
   (b) Calculer la norme de T.
   (c) Existe-t-il une fonction $h \in E$ telle que $T(g) = \langle g, h\rangle$ pour tout $g \in E$? Justifier votre réponse.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^3} \\ x^{-\frac{1}{3}} & \text{si } \frac{1}{n^3} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

   (a) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans E.
   (b) Pour toute fonction continue $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 (g(x) - x^{-\frac{1}{3}})^2\, dx$ converge et que sa valeur est strictement positive.
   (c) Soit $g \in E$. Montrer que la suite $||g - f_n||$ ne peut pas converger vers 0 et conclure que E n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 3. Soit H un espace vectoriel complexe normé.

1. Si H est un espace préhilbertien, montrer qu'on a les identités :

$$4\langle x, y\rangle = ||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2, \quad \text{(identité de polarisation)},$$
$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \quad \text{(identité du parallélogramme)}.$$

2. (Théorème de Jordan–von Neumann) On suppose que la norme de H satisfait l'identité du parallélogramme et on définit $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ par :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2), \quad \forall x, y \in H.$$

   (a) Vérifier que $f(x, x) = ||x||^2$ et que $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.
   (b) Pour tout $y \in H$, on pose $h_y(x) = ||x + y||^2 - ||x - y||^2$. Montrer que

$$h_y(x_1) + h_y(x_2) = \frac{1}{2}h_{2y}(x_1 + x_2).$$

   (c) Pour $y \in H$ fixé, on pose $g(x) = h_y(x) + ih_{iy}(x)$. Montrer que $g(ix) = ig(x)$ et que $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$.
   (d) On pose $F = \{a \in \mathbb{C} \mid g(ax) = ag(x), \forall x \in H\}$. Vérifier que si $a, b, c \in F$ avec $c \neq 0$, alors ab, c^{-1} et $a + b$ sont dans F. En déduire $s + it \in F$ pour s, $t \in \mathbb{Q}$ et conclure que $F = \mathbb{C}$.
   (e) Déduire de ce qui précède qu'un espace vectoriel complexe normé est un espace préhilbertien si et seulement si sa norme satisfait à l'identité du parallélogramme.
   (f) Adapter les résultats précédents au cas où H est un espace vectoriel réel normé.