TD1 : Intégrales de Lebesgue

Exercice 1. (Théorème de convergence décroissante de Beppo-Levi)
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives telle que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$.

1. On suppose que $\int_E f_1 \, d\mu < +\infty$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$
2. Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas $\int_E f_1 \, d\mu < +\infty$?

Exercice 2. Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, $A \in \mathcal{E}$, et f une fonction mesurable positive. Montrer que :

1. $\int_A f \, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p. dans A. *Indication : Utiliser les ensembles* $\Omega_n = \{x \in A | f(x) > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $\int_A f \, d\mu < +\infty \Rightarrow f < +\infty$ p.p. dans A. *Indication : Utiliser les ensembles* $\Omega_n = \{x \in A | f(x) \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{E}$. En utilisant la suite $f_n = \chi_A$ si n est pair, $f_n = 1 - \chi_A$ si n est impair, vérifier que l'inégalité de Fatou peut être stricte.

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable strictement positive telle que $\int_E f \, d\mu = c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ c & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < +\infty \end{cases}$$
Indication : Si $\alpha \geq 1$, on pourra remarquer que les intégrandes sont dominées par αf. Si $\alpha < 1$, le lemme de Fatou s'applique.

Exercice 5. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et supposons que $\mu(E) < +\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables bornées sur E qui converge uniformément vers f. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$
Montrer que l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$ est nécessaire.

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable. Montrer la propriété suivante :
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{E}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$