Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

Exercice 2 On suppose que $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4, \ldots, v_1+v_2+\cdots+v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 3 Montrer que les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit le système

$$S = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,1), \mathbf{e}_2 = (1,1,2), \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\}$$

1. Montrer que S est une base de E.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5,7,12)$ dans cette base.

Exercice 5 Soient $\vec{v_1}(1,2,3,4), \vec{v_2}(2,2,2,6), \vec{v_3}(0,2,4,4), \vec{v_4}(1,0,-1,2), \vec{v_5}(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = Vect\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ et $G = Vect\{\vec{v_4}, \vec{v_5}\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F + G$.

Exercice 6
1. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0,1,1)$, $x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1,1,1)$.
2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Exercice 7 Vrai ou faux ? On désigne par E un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

1. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
2. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$.
3. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (1, 0, -2, 3)$, $v_4 = (2, 1, 0, -1)$, $v_5 = (4, 3, 2, 1)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (3, 4, 5, 16)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (2, 1, 0, 11)$, $v_4 = (3, 4, 5, 14)$.
Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 10 Soit A une matrice $n \times m$ de rang r.

1. Montrer que toute matrice A' obtenue depuis la matrice A en enlevant des colonnes est de rang au plus r.
2. Montrer que toute matrice obtenue depuis la matrice A en enlevant des lignes est de rang au plus r.
3. Montrer qu'il existe une matrice extraite de A (c'est à dire obtenue depuis A en enlevant des lignes et des colonnes), de taille $r \times r$ et de rang r.

Exercice 11 Considerons l'ensemble M_2 des matrices 2×2, (que l'on identifie à $\mathbb{R}^4$). Soit $A \in M_2$ une matrice fixée. On nomme commutant de A et on note $C(A)$ l'ensemble des matrices $B \in M_2$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que $C(A)$ et un sous espace vectoriel de M_2.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k \in C(A)$.

Exercice 12 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

Exercice 14 Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que les propriétés suivantes sont equivalentes :

1. $KerA = KerA^2$
2. $ImA = ImA^2$
3. $ImA \cap kerA = \{0\}$
4. $rg(A^2) = rg(A)$

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^n$, considerons l'ensemble des solutions H de l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

Montrer que H est de dimension $n - 1$ sauf si tous les coefficients a_i sont nuls. (On dit que H est un *hyperplan*).