Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 2 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Exercice 3 Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que

$$(kerA) \cap (imA) = A(kerA^2).$$

Exercice 4 Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

Exercice 5 Soient A et B deux matrices $n \times n$ telles que $AB = BA$. Montrer que

$$B(kerA) \subset kerA$$

et que

$$B(imA) \subset imA.$$

Exercice 6 Discuter la dimension du noyau des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12-\lambda & -6 & 3 \\ -9 & -5-\lambda & 3 \\ -12 & -8 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit $M_{\alpha,\beta}$ la matrice :

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour quelles valeurs de α et de β cette matrice est de rang 3.

Exercice 8 Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = (1,1,1,0); e_2 = (1,1,1,1); e_3 = (1,2,2,1)$$

et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$E = ker(A), F_1 = vect(e_1), F_2 = vect(e_2, e_3).$$

Donner les dimensions de chacun de ces sous espaces ainsi que de $E \cap F_1, E \cap F_2, E + F_1, E + F_2, E + F_1 + F_2$.

Exercice 9 Soient E, F, G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$(E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F + G).$$

A-t-on

$$(E \cap F) + (E \cap G) = E \cap (F + G)?$$

Montrer que

$$E + (F \cap G) \subset (E + F) \cap (E + G).$$

A-t-on

$$E + (F \cap G) = (E + F) \cap (E + G)?$$

Exercice 10 Soit A une matrice $n \times n$.
Montrer que, si $A^2 = A$, alors $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus imA$. Que peut-on dire sur le rang de A ?
Montrer que, si $A^2 = Id$, alors $E = ker(A + Id) \oplus ker(A - Id)$. Que peut-on dire sur le rang de A ?

Exercice 11 Dans le plan, on considère l'appication définie géométriquement comme la symétrie autour de la droite d'équation $x_1 + x_2 = 0$ et parallèlement à la droite d'équation $x_1 - x_2 = 0$. Montrer que cette application géométrique peut être écrite comme la multiplication par une matrice que l'on déterminera.

Exercice 12 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère l'application définie géométriquement comme la projection sur le plan d'équation $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,1)$. Montrer que cette transformation peut être écrite comme la multiplication par une matrice, que l'on déterminera.

Exercice 13 Soient E, F, G des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $F \cap G = \{0\} = E \cap (F + G)$.
2. $E \cap F = \{0\} = (E + F) \cap G$.
3. La réunion de bases de E, F et G est une famille libre.
4. Tout vecteur $x \in E + F + G$ se decompose de manière unique comme $x = e + f + g$, avec $e \in E, f \in F, g \in G$.

On dit alors que E, F et G sont en somme directe, on note $E \oplus F$ l'espace $G = E + F + G$.
Suffit-il que $E \cap F = E \cap G = F \cap G = \{0\}$ pour que E, F et G soient en somme directe ?