

## Algèbre 2- DU1

**Exercice 1** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

**Exercice 2** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

**Exercice 3** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ n & 2 & n & \cdot & \cdot & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ -x & x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -x & x & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x & x \end{vmatrix}$$

**Exercice 4** On note  $a, b, c$  des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de  $D_2$  à un déterminant  $n \times n$  du même type.

**Exercice 5** Montrer qu'il existe une matrice  $A$  de taille  $n \times n$  à coefficients réels telle que  $A^2 = -Id$  si et seulement si  $n$  est pair.

Existe-t-il une matrice carrée  $A$  à coefficients réels telle que  ${}^tA \cdot A = -Id$ ? (on pourra par exemple considérer le coefficient en haut à gauche).

**Exercice 6** Soient  $A$  et  $B$  de matrices  $n \times n$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto \det(A + xB)$  est un polynôme de degré au plus  $n$ . A quelle condition est-il de degré  $n$ ?

**Exercice 7** Quel est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^3$  :  $e_1 = (1, 1, 1)$ ;  $e_2 = (2, 1, 3)$ ;  $e_3 = (1, 2, 2)$ .

Considérons maintenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quel est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs  $Ae_1, Ae_2, Ae_3$ .

**Exercice 8** En utilisant la multilinéarité, montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_2 - b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

est nul.

**Exercice 9**

1. Soient  $A \in M_p(\mathbb{R})$  et  $B \in M_q(\mathbb{R})$ . Calculer (en fonction de  $\det(A)$  et  $\det(B)$ ) le déterminant de la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$ . (On pourra pour cela décomposer  $M$  comme produit de deux matrices de déterminant évident et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient  $A \in M_p(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_q(\mathbb{R})$  et  $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ . Calculer le déterminant de la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$ . (On pourra généraliser la méthode de 1.)

**Exercice 10** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans  $\mathbb{R}^n$ . On note  $e_i$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont la  $i$ -ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice  $n \times n$  dont les vecteurs colonnes  $C_i$  sont donnés par  $C_i = e_i + e_n$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $C_n = e_1 + e_2 + e_n$ . Calculer alors son déterminant. On commencera par étudier les cas  $n = 3$ ,  $n = 4$ , avant de traiter le cas général.

**Exercice 11** Étant donnés des paramètres  $a, b, c$ , résoudre l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$