Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = Id$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle l'expression de A devient une matrice diagonale avec seulement des 1 et des -1 sur la diagonale.
On introduira pour cela les sous-espaces $E = ker(A - I)$ et $F = ker(A + I)$. On dit que A est un symétrie par rapport à E, parallèlement à F.

Exercice 2 Soit A une matrice 2×2 telle que $A^2 = -I$. On cherche à trouver une base dans laquelle l'expression de A est simple. Considerons pour ceci un vecteur e non nul dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que (e, Ae) est une base, et écrire A dans cette base. Donner une interprétation géométrique de la matrice A.

Exercice 3 Soit A une matrice $n \times n$. Soit $P(x) = det(A - xI)$ le polynome caractéristique de A. On suppose que le polynome P admet n racines réelles simples toutes distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1. Montrer que le sous-espace propre $E_i = ker(A - a_iI)$ contient un vecteur non-nul e_i.
2. Montrer que (e_1, e_2) est une famille libre. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre.
3. Montrer, par récurrence, que $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille libre.
4. Donner l'expression de A dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exercice 4 Soit A une matrice 2×2. Soit d le déterminant de A, et a sa trace.

1. Montrer que le polynome caractéristique de A est $P(x) = x^2 - ax + d$.
2. Montrer l'identité matricielle suivante : $A^2 - aA + dI = 0$.

On rappelle que le polynome $P(x)$ a deux racines réelles distinctes a_1 et a_2 si et seulement si son discriminant $\Delta = a^2 - 4d$ est strictement positif. Dans ce cas, montrer, en utilisant l'exercice precedent, que la matrice A est diagonalisable.
Si $\Delta < 0$, le polynome P n'a pas de racine réelle, mais il a deux racines complexes

$$\frac{a \pm i\delta}{2},$$

où δ est la racine de $-\Delta$. En utilisant l'identité matricielle ci-dessus, montrer que

$$\left(\frac{2A - aI}{\delta}\right)^2 = -Id.$$

En utilisant l'un des exercices ci-dessus, montrer alors qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle A s'écrit

$$\begin{bmatrix} a/2 & -\delta/2 \\ \delta/2 & a/2 \end{bmatrix}.$$

Il reste a traiter le cas où $\Delta = 0$. Le polynome P a alors une racine double $a/2$. Montrer que $(A - (a/2)I)^2 = 0$. Conclure que, soit $A = aI/2$ soit il existe une base dans laquelle A est représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} a/2 & 1 \\ 0 & a/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5 Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$.

1. Que peut-on dire sur le rang r de A ?
2. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ dont les r premiers vecteurs constituent une base de imA. Montrer que la représentation de A dans cette base est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Exercice 6 Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.

2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 10 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.