Algèbre Linéaire 2 Feuille de TD n°5

Mlle Simona ROTA NODARI
rotanodari@ceremade.dauphine.fr

Ce document contient des indications qui peuvent être utiles pour la résolution de certains exercices de la cinquième feuille de TD.

Exercice 5

A matrice $n \times n$, $A^2 = 0$.

1. Que peut-on dire sur le rang r de A ?
   On sait que $\mathrm{rg}(A^2) \geq 2\,\mathrm{rg}(A) - n$; donc $2\,\mathrm{rg}(A) \leq n$.
2. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{e_1, \dots, e_r\}$ est une base de $\operatorname{Im} A$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, c'est à dire

   $$x^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

   dans la base $\mathcal{E}$. En utilisant la linéarité,

   $$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A e_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A e_i + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i A e_i = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i A e_i$$

   car $e_i \in \operatorname{Im} A$ pour $1 \leq i \leq r$ donc $Ae_i = A(Ae'_i) = A^2 e'_i = 0$ avec $e'_i \in \mathbb{R}^n$.
   Or, pour $r+1 \leq i \leq n$, $A_i e_i \in \operatorname{Im} A$ et donc $Ae_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ji} e_j$; par conséquent

   $$Ax = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{r} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i a_{ji} \right) e_j$$

et, dans la base $\mathcal{E}$,

$$(Ax)^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_{r+1}a_{1r+1} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{r+1}a_{rr+1} + \cdots + \lambda_n a_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, il faut trouver la matrice qui satisfait

$$A^{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r+1}a_{1r+1} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{r+1}a_{rr+1} + \cdots + \lambda_n a_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^n$
Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. $\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^3, T(x) = 0\}$; en utilisant la linéarité,

$$\begin{aligned} T(x) &= T(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_1 T(e_1) + \lambda_2 T(e_2) + \lambda_3 T(e_3) = \\ &= \lambda_1 e_3 + \lambda_2(-e_1 + e_2 + e_3) + \lambda_3 e_3 = \\ &= -\lambda_2 e_1 + \lambda_2 e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_3 \end{aligned}$$

Donc , étant donné que la famille $\mathcal{E}$ est libre, $T(x) = 0$ ssi

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

En conclusion $\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = \lambda_1 e_1 - \lambda_1 e_3\} = \mathrm{vect}(\{e_1 - e_3\})$.

Représentation des applications linéaires par des matrices
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension n et p, $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_p\}$ une base de F.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Pour tout $j = 1, \ldots, n$, on note $(a_{1j}, \ldots, a_{pj})$ les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$ On appelle matrice représentant f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ la matrice de terme général a_{ij} :

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Remarques :
– Attention à l'ordre dans l'écriture $M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(f)$;
– la j-ième colonne de la matrice est formée des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$;
– si $E = F$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, on note $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}(f)$.

En effet, si $x \in E$ alors $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ et , en utilisant la linéarité de f,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(e_j).$$

Or, $f(e_j) \in F$ donc $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$ et

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \right) f_i = \sum_{i=1}^{p} (M\lambda)_i f_i$$

où la M est la matrice de terme général a_{ij} et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. En conclusion, on a

$$x^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \; f(x)^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} (M\lambda)_1 \\ \vdots \\ (M\lambda)_n \end{pmatrix}$$

et il faut trouver la matrice $M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(f)$ telle que

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(f)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(M\lambda)_1\\ \vdots\\ (M\lambda)_n\end{pmatrix}.$$

Evidemment, $M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(f)=M$, c'est-à-dire $M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(f)$ est la matrice de terme général a_{ij}.

Donc, dans l'exercice, on utilise le fait que la j-ième colonne de la matrice A est formée des composantes du vecteur $T(e_j)$ dans la base $\mathcal{E}$ (ici l'espace de départ et d'arrivé coïncident) ; c'est-à-dire

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_3\\ f_2 = e_1 - e_2\\ f_3 = -e_1 + e_2 + e_3\end{cases}\qquad \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3\\ e_2 = f_1 + f_3\\ e_3 = f_2 + f_3\end{cases}$$

$\mathcal{F}=\{f_1,f_2,f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$; en effet, soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ tq

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3 =\\ &= (\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)e_1+(-\alpha_2+\alpha_3)e_2+(-\alpha_1+\alpha_3)e_3,\end{aligned}$$

or, $\mathcal{E}$ est une famille libre, donc

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\\ -\alpha_2+\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}.$$

3. En utilisant la linéarité,

$$\begin{aligned} T(f_1) &= T(e_1-e_3)=0\\ T(f_2) &= T(e_1-e_2)=e_1-e_2=f_2\\ T(f_3) &= T(-e_1+e_2+e_3)=-e_1+e_2+e_3=f_3\end{aligned}$$

Ensuite, la j-ième colonne de la matrice B est formée des composantes du vecteur $T(f_j)$ dans la base $\mathcal{F}$; c'est-à-dire

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer P^{-1} on utilise l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?
La matrice A est la matrice qui représente l'application T dans la base $\mathcal{E}$ et B est la matrice qui représente la même application dans la base $\mathcal{F}$; par conséquent $B = Q^{-1}AQ$ où Q est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$.
Par définition Q est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$, c'est-à-dire

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

donc la matrice P est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ et $B = P^{-1}AP$.
On remarque que P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{E}$.

Exercice 8

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$\begin{aligned}
P(x) &= \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -1 \\ 2 & 5-x & -2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x \\ 2 & 5-x & -2 \\ 4-x & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x \\ 0 & 3-x & -2(3-x) \\ 0 & -3+x & -(3-x)^2 \end{vmatrix} = \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x \\ 0 & 3-x & -2(3-x) \\ 0 & 0 & -(3-x)(5-x) \end{vmatrix} = (3-x)^2(5-x)
\end{aligned}$$

donc les valeurs propres de A sont $a_1 = 3$ avec multiplicité 2 et $a_2 = 5$.
On sait que la matrice A est diagonalisable si et seulement si les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^3$; on cherche donc les vecteurs propres de A.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \ker(A - 3I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \ker(A - 5I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Il reste, donc, à vérifier que la famille $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre ; pour cela on considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et on conclut que la famille $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, la matrice A est diagonalisable et dans la base des vecteurs propres $\mathcal{E}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Attention : Je n'ai pas utilisé le théorème que j'ai introduit mardi en TD parce qu'il n'a pas été démontré. Donc, de préférence, utilisez la méthode ici expliquée pour résoudre les exercices.

Exercice 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice sans calculer le polynôme caractéristique on observe que $\det(A - xI) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - xI) < n$ où n est la taille de la matrice.
Considérons la matrice $A - xI$

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \xrightarrow{l_i = l_i - l_1} \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ x & -x & 0 \\ x & 0 & -x \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 = c_1 + c_2 + c_3}$$
$$\begin{pmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

- $x = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A - xI) = 1 < 3$ et donc $a_1 = 0$ est une valeur propre de A ;
- $x = 3 \Rightarrow \mathrm{rg}(A - xI) = 2 < 3$ et donc $a_2 = 3$ est une valeur propre de A.

De plus, $\dim(E_1) = \dim(\ker(A - a_1 I)) = 3 - \mathrm{rg}(A - a_1 I) = 2$ et $\dim(E_2) = \dim(\ker(A - a_2 I)) = 3 - \mathrm{rg}(A - a_2 I) = 1$.
La matrice A est-elle diagonalisable ? Oui.

PREMIÈRE PREUVE

On démontre que si E_1 est le sous-espace propre associée à la valeur propre a_1 et E_2 est le sous-espace propre associée à la valeur propre a_2 avec $a_1 \neq a_2$ alors $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. En effet, soit $x \in E_1 \cap E_2$ alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in E_1 \\ x \in E_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ax = a_1 x \\ Ax = a_2 x \end{array} \right. \Rightarrow a_1 x = a_2 x \Rightarrow (a_1 - a_2)x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Dans l'exercice donc, E_1 et E_2 sont en somme directe et $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$ car $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$. Par conséquent, si on appelle $\mathcal{E}_1$ la base de E_1 et $\mathcal{E}_2$ la base de E_2 on remarque que $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui est composée de vecteurs propres de A. Donc les vecteurs propres de A forment une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice est diagonalisable.

DEUXIÈME PREUVE

Soit $\mathcal{E}_1 = \{v_1, v_2\}$ une base de E_1 et $\mathcal{E}_2 = \{v_3\}$ une base de E_2 ; alors $\mathcal{E} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons que la famille $\mathcal{E}$ est libre ; soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0; \tag{1}$$

en multipliant (1) par a_2 et en appliquant la matrice A à (1), on trouve les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_2 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 + \lambda_3 a_2 v_3 &= 0 \qquad (2) \\ \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_1 v_2 + \lambda_3 a_2 v_3 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

or, si on soustrait l'équation (3) à (2) on a

$$\lambda_1(a_2 - a_1)v_1 + \lambda_2(a_2 - a_1)v_2 = 0$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(a_2 - a_1) = 0 \\ \lambda_2(a_2 - a_1) = 0 \end{array} \right.$$

car la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre. Étant donné que $a_1 \neq a_2$, on peut en conclure $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$ grâce à (1). Donc les vecteurs propres de A forment une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice est diagonalisable.

Exercice 10

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(A-xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-x \\ 0 & 2-x & -2(2-x) \\ 0 & 0 & -(2-x)(6-x) \end{vmatrix} = (2-x)^2(6-x). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont $a_1 = 2$ et $a_2 = 6$. On étudie maintenant la dimension de $E_1 = \ker(A - a_1 I)$.

$$A - a_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A - a_1 I) = 1$ et $\dim(E_1) = 2$. Par conséquent (voir l'exercice 9 pour la démonstration) la matrice A est diagonalisable et dans la base des vecteurs propres s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(B-xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1 & 2-x & -1 \\ -1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4-x \\ 0 & 3-x & 3-x \\ 0 & 0 & (3-x)(1-x) \end{vmatrix} = (3-x)^2(1-x). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont $a_1 = 3$ et $a_2 = 1$. On étudie maintenant la dimension de $E_1 = \ker(A - a_1 I)$.

$$B - a_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(B - a_1 I) = 1$ et $\dim(E_1) = 2$. Par conséquent (voir l'exercice 9 pour la démonstration) la matrice B est diagonalisable et dans la base des vecteurs propres s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = \det(C - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3.$$

La seule valeur propre de C est $a_1 = 1$ avec multiplicité 3. On étudie maintenant la dimension de $E_1 = \ker(A - a_1 I)$.

$$C - a_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(C - a_1 I) = 1$ et $\dim(E_1) = 2$. Soit $\mathcal{E}_1 = \{v_1, v_2\}$ une base de E_1 ; $\mathcal{E}_1$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ parce qu'elle contient seulement deux vecteurs. Par conséquent, il n'existe pas une base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de C (on ne peut pas trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants) et la matrice C n'est pas diagonalisable.

Bon courage à tous pour l'examen !