Université de Bourgogne
Analyse Fonctionnelle

Année 2015-2016

Devoir Maison

Exercice 1. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions uniformément bornée qui sont intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$. On pose

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$$

pour tout $a \leq x \leq b$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{F_{n_k}\}$ qui converge uniformément sur $[a,b]$.

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$, on pose $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ l'espace des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$[f]_\alpha = \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty$$

(1) Pour $0 < \alpha \leq 1$, montrer que $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + [f]_\alpha.$$

Pensez à vérifier qu'il s'agit bien d'une norme sur $\mathcal{C}^{0,\alpha}$.

(2) Pour $\alpha > 1$, montrer que l'espace $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ est réduit aux seules fonctions constantes.

Exercice 3. Soit M un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H.

(1) Montrer que tout $x \in H$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$x = Px + Qx$$

avec $Px \in M$ et $Qx \in M^\perp$.

(2) Montrer que $M = (M^\perp)^\perp$.

(3) Soit $L : H \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Posons $M = \{x \in H \mid L(x) = 0\}$.

  (a) Montrer que M est un sous-espace vectoriel fermé de H.

  (b) Montrer que si $M \neq H$ alors $M^\perp$ est un sous-espace de dimension 1.

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t+\lambda).$$

(1) Montrer que f et f' sont développables en série de Fourier.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(in - e^{in\lambda})c_n(f) = 0$, où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f. Trouver toutes les f vérifiant l'équation $(\star)$

Exercice 5. Soit f une fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux et *à sauts symétriques*, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right).$$

(1) On suppose que $c_n(f) = o(|n|^{-p})$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{p-2}$.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de Fourier pour que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$.