
Exercices supplémentaires

Exercice 1. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.
- (2) La fonction f est croissante.
- (3) La fonction f est croissante et strictement positive.
- (4) Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
- (5) Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 2. Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

- (1) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$;
- (2) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. Démontrer que :

- (1) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$;
- (2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
- (3) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- (4) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
- (5) $\forall A \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 4. A et B sont des parties d'un ensemble E . Montrer que :

- (1) $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$;
- (2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$;
- (3) $A \Delta B = B \Delta A$;
- (4) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$;
- (5) $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$.